

Umweltprojekte im Mathematikunterricht

Günther Karigl

Mathematische Modelle aus dem Umweltbereich sind i.a. derart komplex, daß sie mit exakten Methoden nur unzureichend behandelt werden können. Dies gilt für die mathematische Forschung genauso wie im Unterricht. Hier bietet sich die Computersimulation als Ausweg an. Im folgenden werden Modellbildung und Modellsimulation im Umweltbereich an Hand von konkreten Beispielen illustriert. Als Ergänzung zu dieser Darstellung ist eine Programmdiskette mit Simulationsprogrammen zu den besprochenen Modellen vom Autor erhältlich.

1 Einleitung

„Unter Berücksichtigung von Interessen der Schüler soll ein Sachverhalt mit mathematischen Verfahren untersucht und dadurch ein vertiefter Einblick in diesen Sachverhalt gewonnen werden. ... In erster Linie sollte dabei ein Thema aus einem außermathematischen Sachbereich (etwa Alltagsprobleme, Sozialbereiche, Umwelt, Wirtschaft, Naturwissenschaften) behandelt werden. Eine Integration in eines der Stoffgebiete dieser Klasse ist wünschenswert. Nach Möglichkeit sollte auch eine Zusammenarbeit mit anderen Unterrichtsgegenständen angestrebt werden.“ Zu dieser Forderung aus dem Lehrplan für die 5. bis 7. Klasse der AHS möchte der Verfaßer im folgenden einige Anregungen geben (siehe auch Reichel, 1991). Als Themen für einen projektorientierten Unterricht bieten sich Fragestellungen aus dem Umweltbereich in idealer Weise an. Sie besitzen seit Jahren ungeschmälerte Aktualität, fördern das Umweltbewußtsein der Schüler und bieten Anknüpfungspunkte zu Biologie, Chemie, Physik oder den Wirtschaftswissenschaften.

Eine Übersicht über die behandelten Themen ist in der nachstehenden Tabelle zusammengestellt. Die Gliederung erfolgt dabei nicht nach mathematischen Gesichtspunkten, sondern nach Sachthemen. Neben dem jeweiligen Themenkreis sind auch Hinweise zum Anwendungsbezug und zu den verwendeten mathematischen Methoden angegeben. Für weitere Projektvorschläge aus dem Bereich der Ökologie sei auf Karigl (1991) verwiesen.

Themenkreis	Anwendungsfächer	Mathematische Methoden
Verhalten von Populationen, welche einer wirtschaftlichen Ausbeutung unterliegen	Biologie, Wirtschaftskunde	Simulation, dynamische Systeme
Überleben in einer schadstoffbelasteten Umwelt	Biologie, Chemie	Simulation, dynam. Systeme
Emission von Schadstoffen	Physik, Geometrie	Kurvendiskussion, analyt. Geometrie

2 Verhalten von Populationen, welche einer wirtschaftlichen Ausbeutung unterliegen

Im Wechselspiel zwischen ökologischen und ökonomischen Interessen ist in den letzten Jahren eine Theorie entstanden, die sich mit der Ausbeutung bzw. Ernte von Tier- und Pflanzenpopulationen beschäftigt. Dabei interessieren vor allem Strategien zur Nutzung sogenannter erneuerbarer Ressourcen, z.B. eines Fisch- oder eines Waldbestandes, die einen biologisch zulässigen und zugleich wirtschaftlich optimalen Ertrag garantieren (Getz and Haight, 1989).

2.1 Ausbeutung in altersstrukturierten Populationen

Wir betrachten eine Population, etwa eine Fischpopulation, welche einer wirtschaftlichen Ausbeutung unterliege. Ferner werde angenommen, daß die Population in Altersklassen (Entwicklungsstadien, Größenklassen, ...) untergliedert sei. Als konkretes Beispiel wählen wir das in Abb. 1 dargestellte 3-Klassen-Modell mit konstanten Übergangs- bzw. Fangraten. Die Entwicklung der Population werde durch ein diskretes mathematisches Modell beschrieben, welches die Veränderung der Populationsgrößen (x_t, y_t, z_t) in den 3 Klassen durch folgendes lineare Differenzgleichungssystem wiedergibt:

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= (1 - h_1)(10y_t + 8z_t) \\ y_{t+1} &= (1 - h_2)0,3x_t \\ z_{t+1} &= (1 - h_3)0,5y_t \end{aligned} \quad \text{für } t = 0, 1, 2, \dots$$

Dabei bezeichnen h_1, h_2, h_3 die Fangraten in den einzelnen Klassen; für sie gilt $0 \leq h_i \leq 1$. Faßt man (x_t, y_t, z_t) zum Vektor \vec{x}_t und h_1, h_2, h_3 zur Diagonalmatrix H zusammen, so erhält man in vektorieller Schreibweise

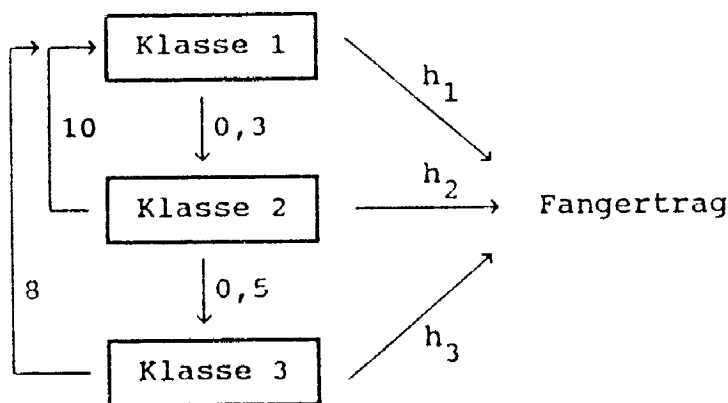


Abbildung 1: Beispiel für eine 3-Klassen-Population

$$\vec{x}_{t+1} = (E - H)M\vec{x}_t \text{ mit}$$

$$E - H = \begin{pmatrix} 1 - h_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - h_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - h_3 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 8 \\ 0,3 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Der Fangertrag pro Individuum ist gegeben durch

$$Y_t = \frac{\text{Anzahl der gefangenen Tiere}}{\text{Anzahl aller Tiere}} = \frac{(1, 1, 1)HM\vec{x}_t}{(1, 1, 1)\vec{x}_t}.$$

Ohne Ausbeutung würde die Population nach diesem Modell unbeschränkt anwachsen und - wie man zeigen kann - einer stabilen Altersverteilung zustreben. Es sollen nun zwei Fangstrategien untersucht werden, bei denen die Fangraten gerade so groß gewählt werden, daß sich die Population im Gleichgewicht befindet. In beiden Fällen kann dann der Gleichgewichtsertrag pro Individuum ermittelt werden.

- Wählen wir die Fangraten in allen Altersklassen gleich, also $h_1 = h_2 = h_3 = h$, so gilt im Gleichgewicht $\vec{x} = (1 - h)M\vec{x}$, d.h.

$$\begin{aligned} x &= (1 - h)(10y + 8z) \\ y &= (1 - h)0,3x \\ z &= (1 - h)0,5y. \end{aligned}$$

Daraus folgt für h die Gleichung $6(1 - h)^3 + 15(1 - h)^2 - 5 = 0$ mit der Näherungslösung $h \approx 0,475$. Damit erhält man die Altersklassenverteilung $\vec{x} = (1; 0,16; 0,04)$ und als ökologisch zulässigen Ertrag im Gleichgewicht

$$Y = \frac{1,085}{1,2} = 0,90 \text{ pro Individuum.}$$

- Wird jedoch nur in der ersten Altersklasse gefangen und bleibt der Bestand in den weiteren Klassen erhalten, also $h_1 > 0$ und $h_2 = h_3 = 0$, so lautet die Gleichgewichtsbedingung $\vec{x} = (E - H)M\vec{x}$ bzw.

$$\begin{aligned} x &= (1 - h_1)(10y + 8z) \\ y &= 0,3x \\ z &= 0,5y. \end{aligned}$$

Es folgt $h_1 = 0,762$, $\vec{x} = (1; 0,3; 0,15)$ und der Gleichgewichtsertrag beträgt $Y = 2,52$ pro Individuum.

640 x 480 UGA

Ausbeute in altersstrukturierten Populationen

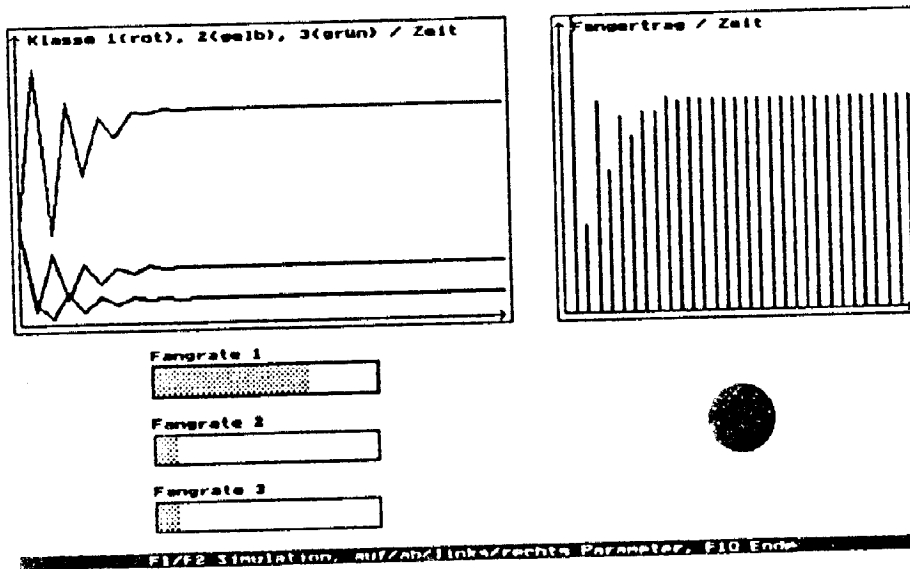


Abbildung 2: Altersklassenverteilung und Fangertag im 3-Klassen-Modell

Das Verhalten des Modells bei unterschiedlicher Wahl der Fangraten sowie deren Einfluß auf den Ertrag kann leicht durch Computersimulation untersucht werden. Das Ergebnis eines derartigen Simulationslaufes ist in Abb. 2 dargestellt. Nach einem allgemeinen Resultat von Beddington and Taylor (1973) ist jede optimale Fangstrategie von der Form, daß eine Klasse teilweise und eventuell eine weitere Klasse zur Gänze ausgebeutet wird.

2.2 Räuber-Beute-Systeme bei Ausbeutung

In dem folgenden Modell werden 2 Populationen betrachtet, die in einer Räuber-Beute-Wechselwirkung stehen und darüber hinaus einer Ausbeutung unterliegen. Die Populationsgrößen seien $x(t)$ für die Beute und $y(t)$ für

die Räuber ($t \geq 0$), die Dynamik des Systems werde durch nachstehendes Differentialgleichungssystem wiedergegeben (vgl. Myerscough et al., 1992):

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= rx\left(1 - \frac{x}{K}\right) - b\frac{x}{x+A}y - F \\ \frac{dy}{dt} &= sy\left(\frac{x}{x+A} - \frac{B}{B+A}\right) - G.\end{aligned}$$

Der Zuwachs der Beutepopulation wird durch die relative Wachstumsrate $r\left(1 - \frac{x}{K}\right)$ gesteuert, welche mit zunehmender Populationsgröße vom Höchstwert r (für $x = 0$) bis auf 0 (für $x = K$) abfällt und dadurch für ein beschränktes Wachstum verantwortlich ist. Der Verlust bei den Beutetieren sowie der Zuwachs der Räuber (pro Zeiteinheit) wird proportional zum Term $\frac{x}{x+A}$ angenommen und trägt damit dem Umstand Rechnung, daß durch eine kleine Beutezahl die Sterberate der Beutetiere sowie die Geburtenrate der Räuber durch die geringe Anzahl von Kontakten zwischen Beute und Räubern verringert wird (siehe Abb. 3). Die Parameter F und G bezeichnen die Fangraten für die Beute- bzw. Räuberpopulation.

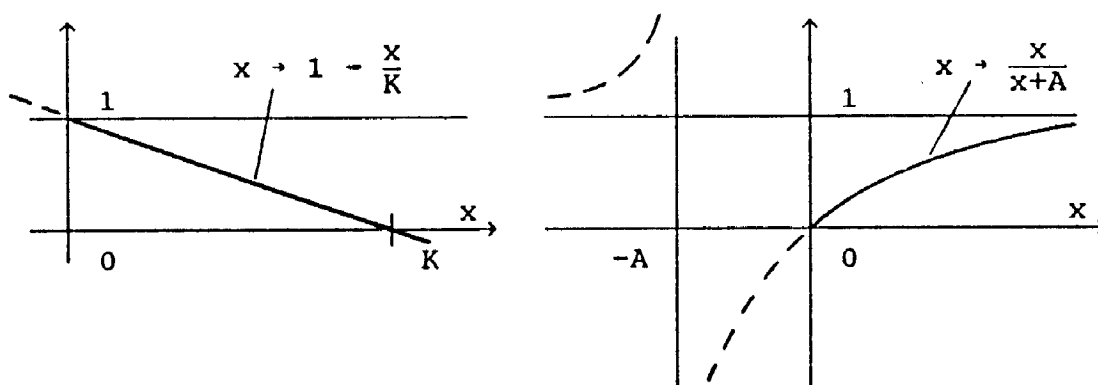


Abbildung 3: Qualitativer Verlauf der relativen Wachstumsraten im Räuber-Beute-Modell

Um einen Einblick in das Modellverhalten zu gewinnen, gehen wir über zu dem transformierten System

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x(1 - r) - b\frac{x}{x+a}y - f \\ \frac{dy}{dt} &= y\left(\frac{x}{x+a} - c\right) - g\end{aligned}$$

und generieren Näherungslösungen etwa nach dem Eulerschen Polygonzugverfahren, dem verbesserten Eulerschen Verfahren oder dem Runge-Kutta-Verfahren (siehe Karigl, 1991). Dabei zeigt sich, daß z.B. in Abhängigkeit der Modellparameter a (Nutzen der Räuber) und f (Fangrate der Beute) sowohl stabile Randgleichgewichtslagen, innere Gleichgewichtslagen als auch stabile Grenzzyklen auftreten können. Das Aussterben einer Population ist genauso möglich wie die Koexistenz von Räuber und Beute, sei es auf konstantem Niveau oder in Form eines wiederkehrenden Zyklus (vgl. Abb. 4).

Räuber-Beute-System bei Ausbeutung

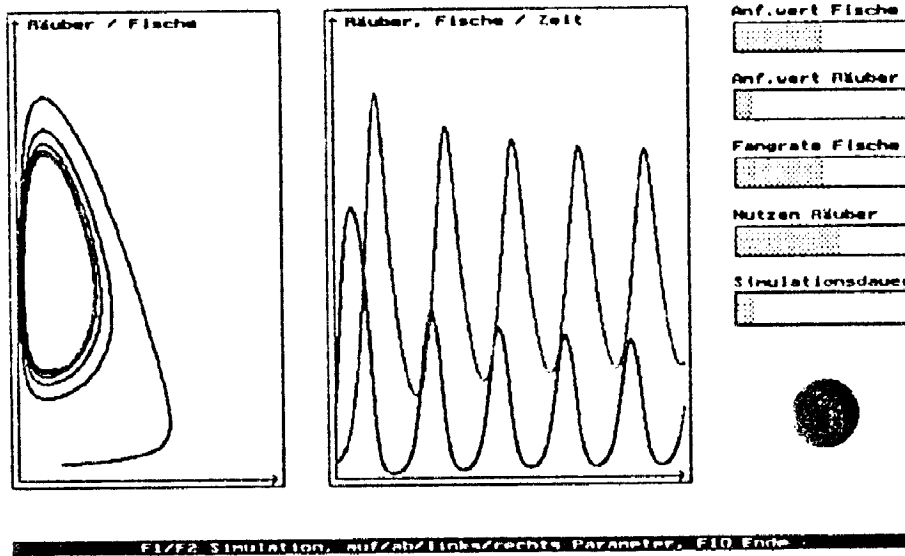


Abbildung 4: Simulation des Räuber-Beute-Systems

3 Überleben in einer schadstoffbelasteten Umwelt

Mit fortschreitender Entwicklung der Landwirtschaft und Industrie nimmt auch die Zahl der Schadstoffe von Jahr zu Jahr zu. Unter den etwa 2 Millionen natürlichen oder künstlich entstandenen Chemikalien, denen die Lebewesen unserer Erde heutzutage ausgesetzt sind, befinden sich auch zahlreiche Giftstoffe, die das Überleben ernsthaft bedrohen. In den beiden folgenden Beispielen werden die Auswirkungen einer Schadstoffbelastung auf das Populationswachstum studiert, wobei sowohl ökologische wie chemische Zusammenhänge bei der Modellbildung Berücksichtigung finden. Dabei zeigt sich, daß bestimmte Schadstoff-Grenzkonzentrationen existieren, die über Überleben oder Aussterben einer Population entscheiden.

3.1 Überleben einer Population in einer schadstoffbelasteten Umwelt

Das folgende Modell beschreibt die Entwicklung einer Population, deren Lebensraum durch Giftstoffe verunreinigt ist, die sich hemmend auf das Populationswachstum auswirken. Dabei soll sowohl die Auswirkung einer einmaligen wie die einer chronischen Schadstoffbelastung untersucht werden.

Wir betrachten die Zustandsgrößen $x(t)$ für die Populationsgröße, $c_0(T)$

für die Schadstoffkonzentration im Organismus der einzelnen Individuen und $c_E(t)$ für die Schadstoffkonzentration in der Umwelt. Die Wechselwirkungen zwischen diesen Größen mögen durch nachstehendes Differentialgleichungssystem beschrieben werden (Hallam et al., 1983):

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x(a_0 - a_1x - a_2c_O) \\ \frac{dc_O}{dt} &= -b_1c_O + b_2c_E \\ \frac{dc_E}{dt} &= c - c_1c_Ex.\end{aligned}$$

Die relative Wachstumsrate $\frac{1}{x} \frac{dx}{dt}$ ist eine lineare Funktion in x und c_O , wobei sowohl eine Zunahme von x wie von c_O ein verringertes Populationswachstum zur Folge haben. Die Gleichung für c_O ist eine Reaktionsgleichung erster Ordnung, der Schadstoff im Organismus wird proportional zu seiner Konzentration abgebaut und zugleich proportional zur Schadstoffkonzentration in der Umwelt erhöht. Die Konzentration c_E schließlich wächst mit konstanter Aufbaurrate c und fällt in Abhängigkeit von c_E und x .

Im folgenden sollen die Lösungen dieses Systems zu den Anfangsbedingungen

$$x(0) = x_0, c_O(0) = 0, c_E(0) = c_{E0}$$

untersucht werden.

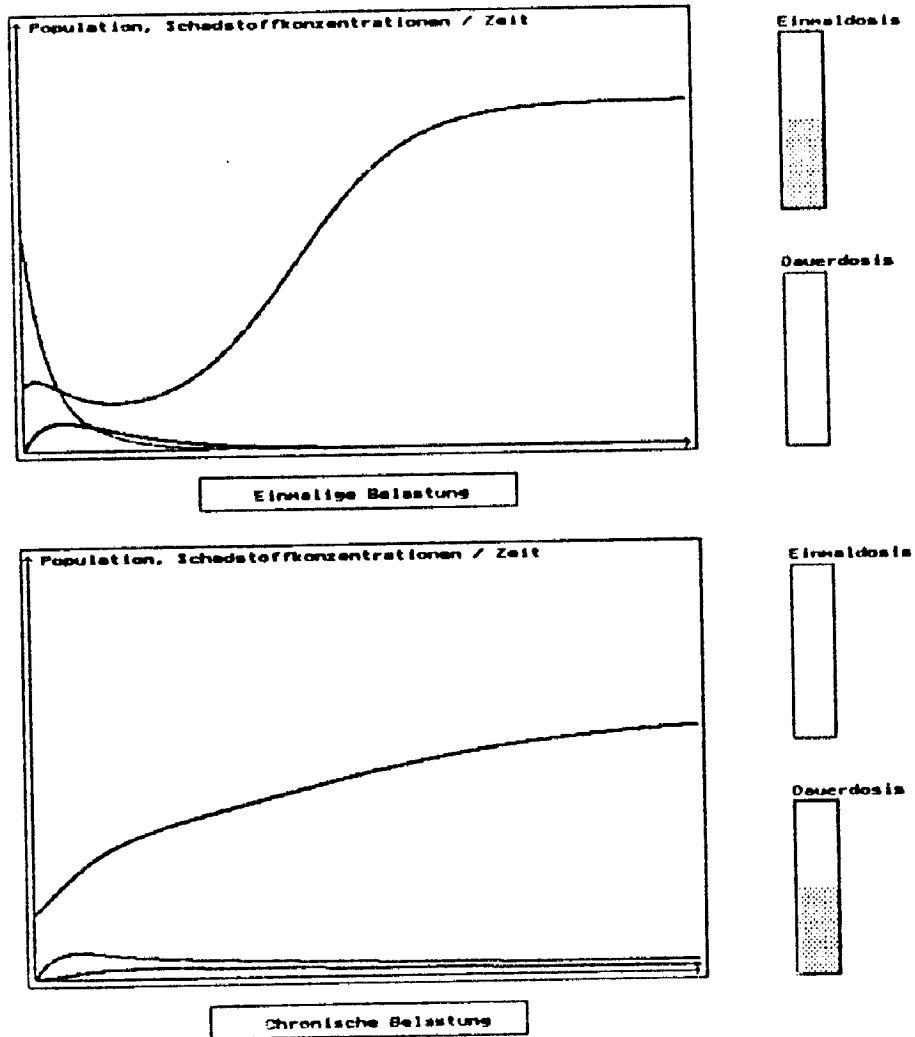
- Um die Auswirkungen einer akuten (einmaligen) Schadstoffdosis abzuschätzen, setzen wir $c = 0$ und $c_{E0} > 0$. Die Computersimulation (siehe Abb. 5) zeigt für kleine Einmaldosen nach anfänglichem Rückgang eine Erholung der Populationsgröße. Diese konvergiert schließlich gegen den Grenzwert $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = a_0/a_1$, während $\lim_{t \rightarrow \infty} c_O(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} c_E(t) = 0$ gilt. Für große Anfangsdosen ist jedoch - selbst bei einmaliger Schadstoffbelastung - ein Aussterben der gesamten Population möglich.
- Der Fall einer chronischen Schadstoffbelastung entspricht der Parameterwahl $c > 0$ und $c_{E0} = 0$. Auch in diesem Fall ist in Abhängigkeit von der Aufbaurrate c ein Überleben ($\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) > 0$) oder Aussterben der Population ($\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$) möglich. Überlebt die Population, wird sie allerdings nicht mehr das ursprüngliche Niveau (ohne Schadstoffbelastung) erreichen, sondern einem niedrigeren Grenzwert zustreben (siehe Abb. 5).

3.2 Konkurrenzsystem unter Schadstoffbelastung

Wir betrachten nun ein System zweier konkurrierender Populationen, deren Wachstum - in jeweils unterschiedlichem Ausmaß - durch Schadstoffe in der

640 x 480 UGA

Überleben einer Population in einer schadstoffbelasteten Umwelt



F1/F8 Simulation, F9 Einmalige Belastung, auf/ab Parameter, F10 Ende

Abbildung 5: Auswirkungen von akuter und chronischer Schadstoffbelastung

Umwelt beeinträchtigt wird. Die Populationsgrößen seien $x(t)$ und $y(t)$, die Schadstoffkonzentration sei c und werde der Einfachheit halber als konstant angenommen. Die Änderung der Populationsgrößen werde beschrieben durch (Huaping and Zhien, 1991)

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= (r_1 - a_{11}x - a_{12}y)x = (r_{10} - r_{11}c - a_{11}x - a_{12}y)x \\ \frac{dy}{dt} &= (r_2 - a_{21}x - a_{22}y)y = (r_{20} - r_{21}c - a_{21}x - a_{22}y)y.\end{aligned}$$

Diese Gleichungen zeigen, daß jede der beiden Populationen durch Schadstoffbelastung, durch ihre eigene Größe (innerspezifische Konkurrenz) und durch die jeweils andere Population (interspezifische Konkurrenz) in ihrem Wachstum behindert wird.

Bestimmt man aus $\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = 0$ die Gleichgewichtslagen des Systems, so erhält man $x = 0$ oder $y = 0$ oder einen inneren Gleichgewichtspunkt (x^*, y^*) als Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned}a_{11}x + a_{12}y &= r_{10} - r_{11}c \\ a_{21}x + a_{22}y &= r_{20} - r_{21}c\end{aligned}$$

gemäß

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} \left| \begin{array}{cc} r_{10} & a_{12} \\ r_{20} & a_{22} \end{array} \right| \\ \left| \begin{array}{cc} a_{11} & r_{10} \\ a_{21} & r_{20} \end{array} \right| \end{pmatrix} - \frac{c}{\Delta} \begin{pmatrix} \left| \begin{array}{cc} r_{11} & a_{12} \\ r_{21} & a_{22} \end{array} \right| \\ \left| \begin{array}{cc} a_{11} & r_{11} \\ a_{21} & r_{21} \end{array} \right| \end{pmatrix}$$

mit $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. Das ist aber die Gleichung einer Geraden mit Parameter c . Folglich wird der innere Gleichgewichtspunkt mit wachsendem c im Phasendiagramm längs einer Geraden verschoben, und zwar so lange, bis eine der Populationen verschwindet (siehe Abb. 6). Für noch größere

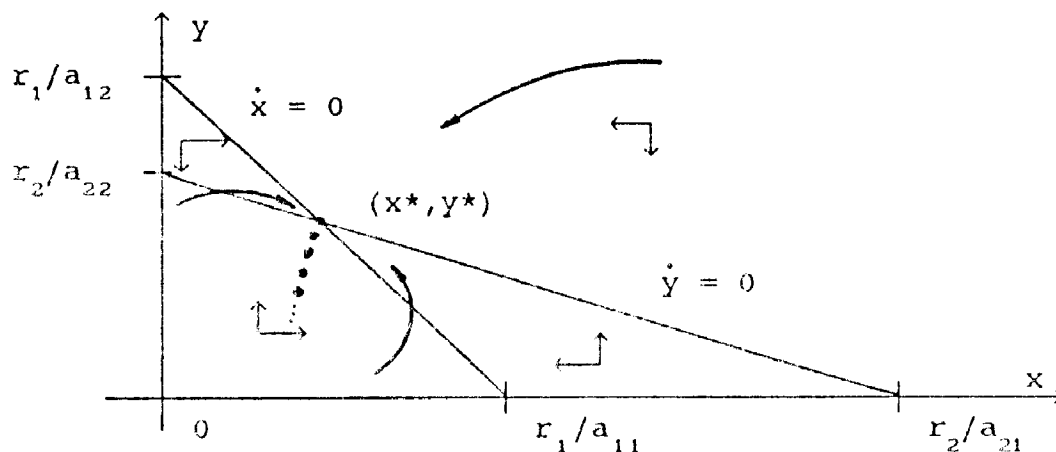


Abbildung 6: Phasendiagramm des Konkurrenzsystems

Werte von c sind beide Populationen zum Aussterben verurteilt. In Abb. 7 sind zwei derartige Simulationen dargestellt.

Konkurrenz-System unter Schadstoffbelastung

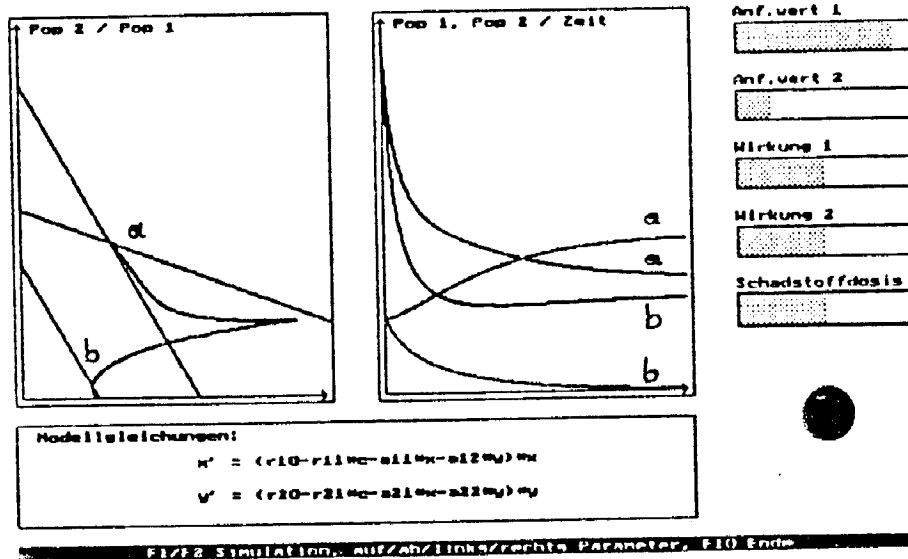


Abbildung 7: Simulation des Konkurrenzsystems

4 Emission von Schadstoffen

Die formale Beschreibung der Ausbreitung von Luftschadstoffen ist ein äußerst kompliziertes Unterfangen. Eine Reihe von Einschränkungen und Vereinfachungen sind notwendig, um überhaupt zu einem mathematischen Modell zu gelangen. So wird häufig die Emissionsquelle auf eine Punktquelle reduziert, Geländeunebenheiten werden nicht berücksichtigt, die Erdoberfläche wird als vollkommen eben und reflektierend angenommen. Große Schwierigkeiten ergeben sich auch, wenn man versucht, die Windverhältnisse, insbesondere die Thermik bei Berghängen oder an Küsten, oder chemische Reaktionen, bei denen Schadstoffe entstehen oder verschwinden können, mit einzubeziehen (Steidl, 1991).

Ein einfacher Ansatz, bei dem die Schadstoffausbreitung als reiner Diffusionsprozeß beschrieben wird, führt auf die Diffusionsgleichung

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \text{div}(D \cdot \text{grad}c).$$

Das ist eine partielle Differentialgleichung für die Schadkonzentration $c = c(x, y, z, t)$ im Punkt (x, y, z) zur Zeit t , D bezeichnet die Diffusionskonstante. Betrachtet man speziell eine punktförmige Schadstoffkonzentration der Stärke Q_0 im Ursprung zur Zeit $t = 0$ (d.h. $c(x, y, z, 0) = Q_0 \delta(x) \delta(y) \delta(z)$), so erhält man für die Konzentration $c(r, t)$ im Abstand r

von der Emissionsquelle zum Zeitpunkt t die Lösung

$$c(r, t) = \frac{Q_0}{(4\pi Dt)^{3/2}} e^{-\frac{r^2}{4Dt}}.$$

Im folgenden soll diese Funktion diskutiert und graphisch veranschaulicht werden.

Eine graphische Darstellung der Schadstoffverteilung $c(r, t)$ kann entweder als 2D-Darstellung der Funktionen $c = c(r)$ für konstantes t , $c = c(t)$ für konstantes r sowie $r = r(t)$ für konstantes c erfolgen, oder aber als 3D-Darstellung von $c = c(r, t)$ durch geeignete Projektion auf die Zeichenebene. Wir wollen den letzteren Weg einschlagen und dazu eine einfache Schrägrißprojektion verwenden.

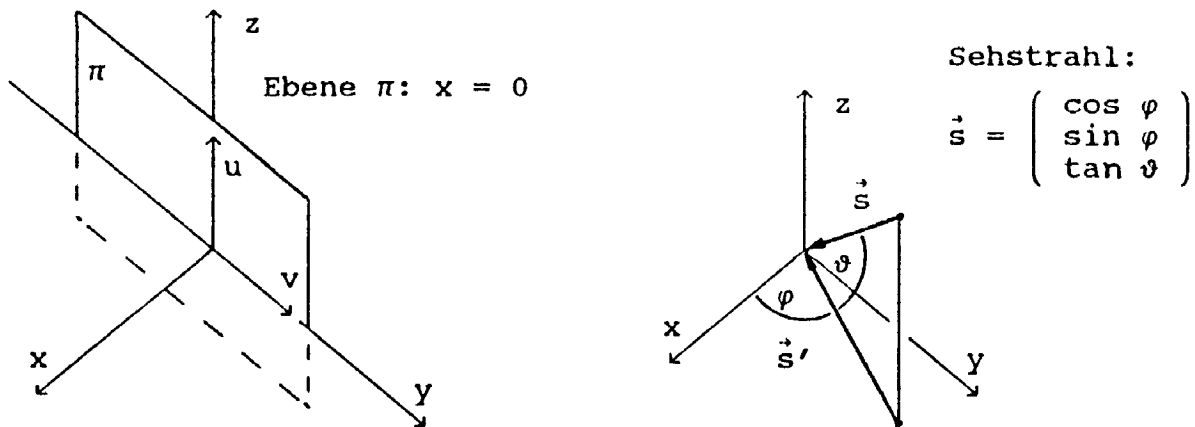


Abbildung 8: Beispiel einer Schrägrißprojektion

Zur Projektion des ersten Oktanten des \mathbb{R}^3 ist die y - z -Ebene π mit der Gleichung $x = 0$ geeignet (Abb. 8). Wird ein Punkt (x, y, z) längs des Sehstrahlvektors $\vec{s} = (\cos \varphi, \sin \varphi, \tan \vartheta)$ auf die Ebene π projiziert, so errechnet man seine neuen Koordinaten (u, v) aus der Gleichung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ \tan \vartheta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ u \\ v \end{pmatrix}$$

gemäß

$$u = y - x \tan \varphi$$

$$v = z - x \frac{\tan \vartheta}{\cos \varphi}.$$

Im Sonderfall $\varphi = 45^\circ$, $\vartheta = \arctan \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 35^\circ$ gilt insbesondere $\tan \varphi = 1$ und $\frac{\tan \vartheta}{\cos \varphi} = 1$, und obige Formel vereinfacht sich zu

$$\begin{aligned} u &= y - x \\ v &= z - x. \end{aligned}$$

Schadstoffemission einer Punktquelle

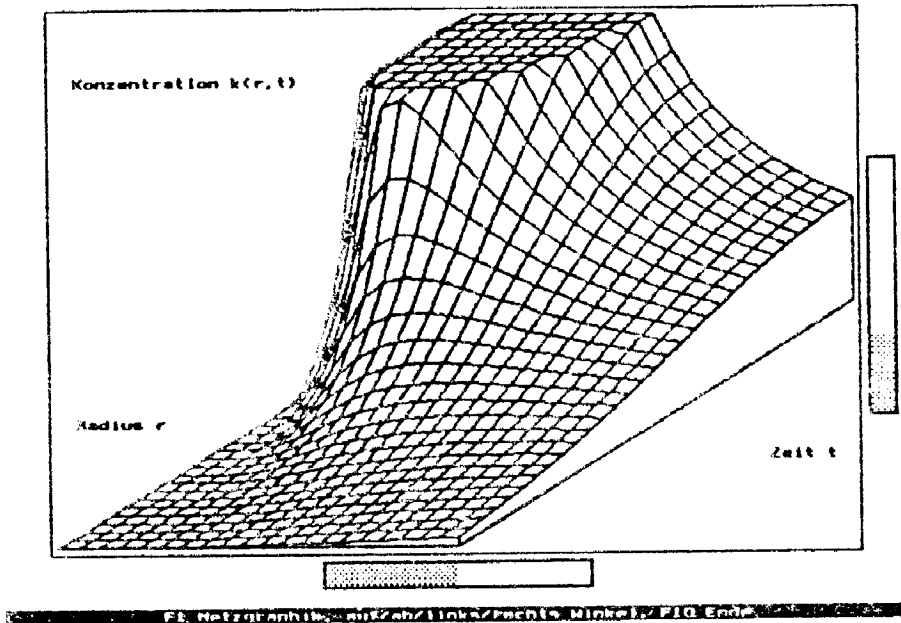


Abbildung 9: 3D-Darstellung zur Schadstoffausbreitung

Die Verteilung der Schadstoffkonzentration in Abhängigkeit vom Radius r und der Zeit t ist in Abb. 9 mit Hilfe dieser Schrägrißprojektion veranschaulicht. Daraus ist deutlich erkennbar, daß die Konzentration zu jedem Zeitpunkt t mit zunehmender Entfernung r von der Emissionsquelle abnimmt. Betrachtet man jedoch einen beliebigen Ort mit festem Abstand r zur Schadstoffquelle, so wird die Konzentration zunächst auf einen bestimmten Höchstwert ansteigen, um anschließend wieder streng monoton abzufallen.

Da das im Abstand r beobachtete Konzentrationsmaximum mit zunehmender Entfernung abnimmt, stellt sich die für die Praxis bedeutsame Frage: Ab welchem Abstand r^* zur Emissionsquelle liegt die Schadstoffkonzentration stets unter einem vorgegebenen kritischen Wert c^* ? Zur Beantwortung dieser Frage betrachten wir die Gleichung

$$c(r, t) = \frac{Q_0}{(4\pi Dt)^{3/2}} e^{-\frac{r^2}{4Dt}} = c^*,$$

welche implizit eine Funktion $r = r(t)$ aller Ort-Zeit-Kombinationen definiert, für welche die Konzentration den konstanten Wert c^* besitzt. Sodann bestimmen wir das absolute Maximum von $r(t)$, d.h. jenen Abstand r^* , in dem die Konzentration den kritischen Wert c^* gerade noch erreicht (siehe Abb. 10). Diese Überlegung führt auf die Optimierungsaufgabe

$$r^2(t) = 4Dt \ln \frac{Q_0}{c^*(4\pi Dt)^{3/2}} = \max!$$

mit der Lösung

$$t^* = \frac{1}{4\pi De} \left(\frac{Q_0}{c^*} \right)^{2/3}, \quad r^* = \sqrt{\frac{3}{2\pi e}} \left(\frac{Q_0}{c^*} \right)^{1/3}.$$

Die kritische Konzentration c^* wird somit zum Zeitpunkt t^* im Abstand r^* erreicht, für $r > r^*$ liegt die Konzentration stets darunter (siehe Abb. 10).

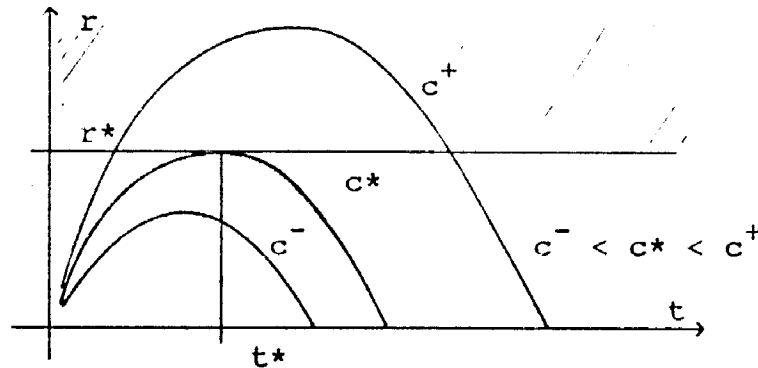


Abbildung 10: Schichtlinien für $c = c(r, t)$

Literatur

- Beddington J.R. and D.B. Taylor (1973): Optimum age specific harvesting of a population. *Biometrics* 29, 801–809.
- Bossel H. (1989): *Simulation dynamischer Systeme*. Vieweg, Braunschweig, Wiesbaden.
- Getz W.M. and R.G. Haight (1989): *Population Harvesting. Demographic Models of Fish, Forest and Animal Resources*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey.
- Hallam T.G., C.E. Clark and G.S. Jordan (1983): Effects of toxicants on populations: a qualitative approach II. First order kinetics. *J. Math. Biol.* 18, 25–37.
- Huaping L. and M. Zhien (1991): The threshold of survival for system of two species in a polluted environment. *J. Math. Biol.* 30, 49–61.
- Karigl G. (1991): *Modellbildung und Simulation ökologischer Systeme im Unterricht*. Didaktik-Reihe der ÖMG, Heft 19, 108–128.

Myerscough M.R., B.F. Gray, W.L. Hogarth and J. Norbury (1992): An analysis of an ordinary differential equation model for a two-species predator-prey system with harvesting and stocking. *J. Math. Biol.* 30, 389-411.

Reichel H. Chr. (Hrsg., 1991): *Fachbereichsarbeiten und Projekte im Mathematikunterricht*. Hölder-Pichler-Tempsky, Wien.

Steidl R. (1991): *Über mathematische Modelle zur Ausbreitung von Luftschadstoffen*. Diplomarbeit, Technische Universität Wien.

Anschrift des Verfassers:

Univ.Doz. Dr. Günther Karigl
Abteilung für Mathematische Biologie der Technischen Universität Wien
1040 Wien, Wiedner Hauptstraße 8-10